

# CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS ÓPTICOS MEDIANTE LA MATRIZ DE COHERENCIA DE *MUELLER*

David Pereda Cubián

Grupo de Técnicas Ópticas Aplicadas,  
Departamento TEISA  
Universidad de Cantabria  
e-mail : [dpcubian@teisa.unican.es](mailto:dpcubian@teisa.unican.es)

José Luis Arce Diego

Grupo de Técnicas Ópticas Aplicadas,  
Departamento TEISA  
Universidad de Cantabria  
e-mail: [jlance@teisa.unican.es](mailto:jlance@teisa.unican.es)

Raf Rentmeesters

University of Gent  
Belgium  
e-mail: [raf.rentmeesters@rug.ac.be](mailto:raf.rentmeesters@rug.ac.be)

**Abstract - The Pauli matrix method can be extended to macroscopic optical devices to separate the different basic effects that can take place into optical devices analyzed by the Jones matrix. This method to measure the influence of the different effects can be extended to optical devices and objects analyzed by means of the Mueller matrix method, and applied to the characterization of their optical properties through their polarization behaviour, and the polarization state and degree of polarization can be analyzed by means of the corresponding Mueller-coherence matrix.**

**This matricial method based on Mueller-coherence matrix is applied on a optical device in order to analyse the different polarization effects that it produces. This method allows a clear interpretation of the experimental data on both depolarising and non-depolarising objects,. This variation of the polarization parameters can be related to different physical properties of the devices.**

## I. INTRODUCCIÓN

El método de la descomposición en matrices de *Pauli* [1], habitualmente utilizado en Óptica Cuántica, se puede extender a dispositivos ópticos macroscópicos con objeto de separar los diferentes efectos básicos que pueden tener lugar en su interior, como el desfase entre componentes, la birrefringencia lineal y la birrefringencia circular, cuando éstos son analizados mediante la matriz de *Jones*.

Este método para la medida de la influencia de los diferentes efectos se puede extender a dispositivos ópticos analizados mediante el método de la matriz de *Mueller* [2], y aplicado a la caracterización de sus propiedades ópticas a través de su comportamiento en polarización. El estado de polarización y el grado de polarización pueden ser analizados mediante la matriz de coherencia 4x4, asociada a la matriz de *Mueller*.

Este método matricial basado en la matriz de coherencia de *Mueller* se aplica a elementos con alto “backscattering” para ver sus efectos de polarización., permitiendo una interpretación clara de los datos experimentales obtenidos

tanto para dispositivos despolarizantes como no despolarizantes, un análisis que no es posible en el caso de trabajar con matrices de *Mueller* únicamente. Las variaciones de los parámetros de polarización se pueden relacionar con diferentes fenómenos, extrayéndose información de los dispositivos estudiados.

## II. MATRIZ DE *MUELLER*

El método de la matriz de *Mueller* permite caracterizar dispositivos ópticos de dos puertas, y el efecto que producen sobre el estado de polarización de la luz, incluso cuando la señal de entrada no esté polarizada.

Una matriz de *Müller*, *M*, tiene dimensiones 4x4, y sus elementos son números reales, ya que la matriz de *Mueller* relaciona los parámetros de Stokes a la entrada y a la salida del dispositivo, es decir, son parámetros de intensidades, no de campos.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Es importante notar que una matriz *M* cualquiera de dimensiones 4x4, no necesariamente se corresponde con una matriz de *Mueller*, es decir, no representa un dispositivo óptico físicamente realizable. Esto sólo ocurrirá cuando la matriz cumpla ciertas condiciones que toda matriz de *Mueller* debe cumplir para representar un dispositivo óptico físicamente realizable [3].

Esta matriz se puede relacionar con la matriz de *Jones* a través de la siguiente relación:

$$M = \frac{1}{2} \cdot \text{Tr}(J^{*T} \cdot \sigma \cdot J \cdot \sigma) \quad (2)$$

donde *J* es la matriz de *Jones* y  $\sigma$  la matriz de *Pauli* correspondiente. La principal ventaja de la matriz de *Mueller* respecto *Jones* es que permite el estudio de dispositivos con

luz incidente que no esté completamente polarizada. Sin embargo, la matriz de *Mueller* no caracteriza adecuadamente dispositivos despolarizantes, que varían el grado de polarización de la luz. Para aplicaciones con elementos despolarizantes, con objeto de extraer el máximo de información de ellos, es necesario trabajar con métodos que permitan extraer información adicional a la de la matriz de *Mueller*.

### III. MATRIZ DE COHERENCIA DE MUELLER

A partir de una matriz de *Jones* se pueden obtener cuatro coeficientes:

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} K_0 = \frac{1}{2} \cdot (a + d) \\ K_1 = \frac{1}{2} \cdot (a - d) \\ K_2 = \frac{1}{2} \cdot (b + c) \\ K_3 = \frac{1}{2} \cdot (b - c) \end{cases} \quad (3)$$

A partir del vector  $Q$  formado por estos coeficientes, se puede obtener la matriz de coherencia de *Mueller*  $T_C$ , de la siguiente forma:

$$T_C = Q \cdot Q^{*T} \quad (4)$$

Esta matriz es una matriz compleja, de dimensión  $4 \times 4$ , que se puede relacionar de manera directa con la matriz de *Mueller*. Los elementos de la matriz de se calculan a través de la base de dieciséis matrices  $\eta$  de  $4 \times 4$ :

$$M = \sum_i a_i \cdot \eta_i \quad (5)$$

Si la matriz  $M$  de dimensiones  $4 \times 4$  es real, los 16 coeficientes de la descomposición  $a_i$  serán reales, lo cual sucederá con las matrices de *Mueller*. Estas 16 matrices son una extensión de las matrices de *Pauli*. Las equivalentes a las matrices  $2 \times 2$  serían:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \eta_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ \eta_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \eta_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

El resto de matrices se pueden obtener mediante la siguiente expresión:

$$\eta_i^T \cdot \eta_j = \eta_{(4-i+j)} \quad (7)$$

De esta manera, la matriz de coherencia de *Mueller* se puede relacionar de manera directa con la matriz de *Mueller* experimental de un dispositivo. A partir de esta matriz se pueden obtener sus autovalores  $\lambda_i$  y autovectores  $T_{ci}$ :

$$T_C = \lambda_1 \cdot T_{c1} + \lambda_2 \cdot T_{c2} + \lambda_3 \cdot T_{c3} + \lambda_4 \cdot T_{c4} \quad (8)$$

En caso de una correspondencia directa entre la matriz de *Jones* y la matriz de *Mueller* correspondiente, sólo existirá un autovalor diferente a cero. En caso de que no sea así, el objeto será despolarizante, y se puede hablar de su entropía, que se define de la siguiente manera:

$$H_T = \sum x_i \cdot \log_4 x_i \quad (9)$$

donde:

$$x_i = \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j} \quad 0 < x_i < 1 \quad (10)$$

En objetos no despolarizantes, habrá cuatro autovalores iguales, de manera que la entropía será 0, mientras que en objetos completamente despolarizantes, es decir, aquellos que reflejarán luz totalmente despolarizada, su valor será 1.

A partir de cada uno de los autovalores, y utilizando la expresión que relaciona los parámetros  $K$  y los elementos de la matriz de *Jones* se puede hallar la expresión del vector de *Jones* asociado al autovector. En dispositivos experimentales no despolarizantes, habitualmente se tendrá una componente en la descomposición en autovalores cuyo valor sea mucho mayor que la de los demás, de manera que se tomará como la componente principal, y su comportamiento se aproximará, principalmente, al de la matriz de *Jones* de ese autovector.

### IV. APLICACIÓN A LA CARACTERIZACIÓN DE DISPOSITIVOS Y MEDIOS ÓPTICOS

#### A. Sistema de medida

El sistema de medida más simple empleado para la obtención de las matrices de *Mueller* características de los dispositivos será el siguiente:

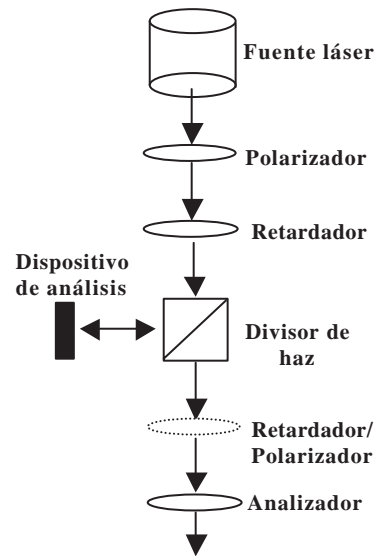


Fig. 1. Esquema para la obtención de los valores de la matriz de *Mueller* de un dispositivo óptico.

Los valores de los elementos de la matriz de *Mueller* se obtienen a partir de medidas con diferentes estados de

polarización de entrada. Existen varios métodos de obtención de los valores de la matriz de Mueller [4].

### B. Adquisición de datos y matriz de Mueller experimental

Para la adquisición de datos se ha desarrollado una aplicación en *MATLAB*®, a partir de los cuales se pueden calcular todos los parámetros de la matriz de coherencia de *Mueller*, y por lo tanto, los autovalores, autovectores y valores de entropía.

Mediante medidas experimentales se obtiene la matriz de *Mueller* de un retardador  $\lambda/4$ , que viene dada por la siguiente expresión:

$$M = \begin{pmatrix} 0.998 & 0.012 & 0.005 & 0.041 \\ -0.005 & 1.003 & 0.021 & -0.007 \\ 0.091 & 0.072 & 0.102 & -1.092 \\ 0.004 & 0.022 & 0.942 & 0.154 \end{pmatrix} \quad (11)$$

A partir de esta matriz de *Mueller* se calcula la matriz de coherencia  $T_c$ , sus autovalores, autovectores, entropía, y matriz de *Jones* equivalente, tal y como se presenta a continuación.

### C. Interpretación y discusión de los resultados

En primer lugar, se halla la matriz de coherencia asociada a la matriz de *Mueller*,  $T_c$ . Esta matriz será:

$$T_c = \begin{pmatrix} 1.129 & 0.004+1.019 \cdot i & 0.048-0.015 \cdot i & 0.023+0.025 \cdot i \\ 0.004-1.019 \cdot i & 0.872 & 0.047+0.019 \cdot i & 0.008+0.043 \cdot i \\ 0.048+0.015 \cdot i & 0.047-0.019 \cdot i & -0.028 & -0.075+0.008 \cdot i \\ 0.023-0.025 \cdot i & 0.008-0.043 \cdot i & -0.075-0.008 \cdot i & 0.023 \end{pmatrix} \quad (12)$$

A partir de esta matriz, se realiza su descomposición en autovalores y autovectores, obteniéndose que el autovector principal, con una amplitud superior al siguiente en un factor 15, y cuyos elementos son:

$$\begin{cases} K_0 = 0.7498 \\ K_1 = 0.0036 - 0.6612 \cdot i \\ K_2 = 0.0117 - 0.0093 \cdot i \\ K_3 = -0.0060 - 0.0117 \cdot i \end{cases} \quad (13)$$

Si se calcula el valor de la entropía, éste será de 0.025, es decir, que apenas se produce variación en el grado de polarización de la luz incidente sobre este dispositivo óptico. Si se calcula el vector de *Jones* asociado al autovector principal, se obtiene:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0.0217 \begin{bmatrix} -33.56^\circ \end{bmatrix} \\ 0.0179 \begin{bmatrix} 49.24^\circ \end{bmatrix} & 0.9945 \begin{bmatrix} 82.81^\circ \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Como se puede observar, esta matriz de *Jones* se asemeja a la matriz de *Jones* teórica de un retardador lineal  $\lambda/4$ , es decir, la componente principal del comportamiento de este dispositivo corresponde, efectivamente, al de un retardador lineal  $\lambda/4$ .

## V. CONCLUSIONES

Se ha presentado la utilización del método de la matriz de coherencia de *Mueller* para la caracterización de las propiedades dependientes de la polarización en dispositivos ópticos en los que tanto el estado como el grado de polarización puedan variar. A diferencia del método de la matriz de *Mueller*, permite estudiar convenientemente dispositivos donde también el grado de polarización varíe.

Este método matricial se ha aplicado al análisis del comportamiento de un retardador lineal  $\lambda/4$ , mediante el cálculo de la matriz de coherencia asociada a la matriz de *Mueller* experimental, y todos los parámetros que de ésta se derivan. Se ha observado que este dispositivo mantiene el grado de polarización de la luz incidente, y que su componente principal es la matriz de *Jones* correspondiente a dicho dispositivo.

## REFERENCIAS

- [1] D.Bohm. "*Quantum Theory*". Dover, 1989.
- [2] A.Gerard, J.M.Burch, "*Introduction to matricial methods in optics*", John Wiley & Sons, 1975.
- [3] A.B.Kostinski, C.R.Givens, J.M.Kwiatkowski, "*Constraints of Mueller matrix in polarization optics*", Applied Optics 32(0), 1993.
- [4] J.Lee, J.Koh, R.W.Collins, "*Multichannel Mueller matrix ellipsometer for real-time spectroscopy of anisotropic surfaces and films*", Optics Letters, Vol.25, n.21, pp.1573-1575, 2000.